OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ-12 FEBRUARIE 2011
CLASA a-XI-a

SUBIECTUL I

Dacă $x, y, z, t \in Z$ şi $\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \\ x^5 & y^5 & z^5 & t^5 \end{vmatrix}$, să se arate că Δ este divizibil prin 30.

SUBIECTUL II

Dacă $k \in IR^*, n \in IN, n \geq 2$ şi $A, B, C \in M_n(IR)$ astfel încât $k(A+B) = A \cdot B, k(B+C) = B \cdot C, k(C+A) = C \cdot A$ să se calculeze $\det\left[(A - kI_n)^2 + (B - kI_n)^2 + (C - kI_n)^2\right]$.

SUBIECTUL III

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale, strict pozitive şi cu proprietatea că există $p \in (0, 1)$ astfel încât $x_{n+1} \leq 2px_n^2 - x_n^3, \forall n \in IN$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

SUBIECTUL IV

Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n+1)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.